

- (2) (1) の標準形問題の実行可能基底解をすべて求めよ。また、それらの場合の目的関数の値を求めて比較せよ。
- (3) 内積の考え方を利用して、問題 (LP) の実行可能集合を図示せよ。
- (4) 定理 2.1 を利用して、問題 (LP) の最適解と最適値を図から求めよ。

2.3 シンプレックス法

シンプレックス法は、実行可能集合の 1 つの端点から出発して、目的関数値がより小さくなる隣接する端点へ移動し、最終的に、最適解へたどり着くためのアルゴリズムである。その計算手順を最初に述べよう。

考え方：シンプレックス法の計算手順 (基本)

- (1) **標準形への変形** 非負条件以外の不等式はスラック変数を挿入して等式に変形し、右辺が負ならば両辺を (-1) 倍する。
- (2) 連立 1 次方程式の拡大係数行列の成分と目的関数の係数を取り出し、表にする。
- (3) **初期値の設定** 実行可能基底解を 1 つみつける。すべての行にスラック変数を入れた場合は自動的に単位行列が構成され基底行列となる。
- (4) 基底行列の部分を行基本変形で単位行列⁵⁾に変形し、基底行列にあたる列ベクトルがどこかを明示するために、該当するすべての列を 1 つずつ四角で囲む。
- (5) **判定項の構成** 基底変数に対応する目的関数の係数部分を 0 にするために行基本変形を行う。
- (6) **判定項 (非基底行列にあたる列の目的関数の係数のところ)** に目印を付ける。例えば、線でくくったり ($\square$)、四角で囲んだりする。
- (7) **停止条件の判定**
 - 判定項のすべての成分が 0 以上ならば停止 (現在の基底解が最適)
→ **終了**。表の右上の数の符号を反対にした値が最小値となる。なお、表の右上の数は右辺にでてきている値なので、目的関数の値とするなら左辺に移項する、つまり、符号を反対にする必要がある。
 - 判定項に負の成分があるならば、**ピボット操作** へ進み、基底行列を更新し、(4) へ戻る。

以下では、目的関数の値を減少させる方向を決定し、隣接する端点に移動するプロセスを考える。新しく基底行列に加えようとする列ベクトルの成分のなかで1としたいところを「ピボット」とよび、その列ベクトルを基本ベクトルへ変形する。つまり、ピボットの位置の数の逆数をその行にかけて1にし、ピボットの位置以外の成分の値を0にするような行基本変形を行う。この変形の仕方を**掃き出し法**ともいうが、その結果、基底変数と非基底変数の入れ替えが行われ、**基底行列が更新**される。この操作を**ピボット操作**という。

考え方：ピボット操作 (ピボットの探し方と基底行列の更新)

- (8) 繰り返しのときは、判定項のなかに「**負の成分**」がある場合なので、(6)で目印を付けたなかで負の数を見つけ、それらの一番左に位置しているところ⁶⁾を丸(○)で囲む。
- (9) (8)で○で囲んだところの下の列ベクトルが新しく基底行列に加わる列ベクトルとなり、その成分のなかで1にしたいところを決定する。ここが**ピボット**の位置である。その列ベクトルの成分の値によって以下の2通りの場合がある。

● 成分がすべて0以下の場合 (ピボットなし)

制約条件をみたしたまま目的関数値がいくらでも小さくなるので、下に非有界となり最適解は存在しない (値は $-\infty$ に近づく)。よって、繰り返しを停止 → 終了。

● 成分のなかで正の値がある場合 (ピボット決定)

正の値が1か所しかなければそこがピボットの位置。複数ある場合はそれらがピボットの候補となり、次のようにしてそのなかから選ぶ。**正の値**のところだけに着目し、その値で右辺の数を割る。割った結果、その値が一番小さいところを○で囲み、その行に対応する候補の場所がピボットの位置となる。

ピボットの位置が決まったら、(4)へ戻る。

5) 実際には単位行列でなくても、行の入れ替えを行うと単位行列になるような異なる**基本ベクトル**(1つの成分のみ1で他の成分が0のベクトル)を並べたものでもかまわない。そのため、本書では、あえて行の入れ替えは行わない。

6) 本書では、負の成分のうちで**一番左に位置しているところ**を選んでいますが、実際にはどこを選んでもかまわない。他書では「絶対値の一番大きなところ」としているものもある。

反復後の (4) と (5) を詳しく説明する.

考え方：反復後の **基底行列の更新** と **判定項の更新**

(4) 次のピボットをみつけたら丸 (○) で囲み, その列ベクトルを基本ベクトルにするために, 以下のように変形し, 四角で囲む.

① ピボットの行の各成分にピボットの位置の数の逆数をかけて, ピボットの位置の数を 1 とし,

② ピボットの上下のところを 0 にするように行基本変形を行う.

つまり, 更新された基底行列から単位行列 (行の入れ替えをしたら単位行列となる基本ベクトルからなる行列) への変形, $(B, N \mid b)$ から $(E, B^{-1}N \mid B^{-1}b)$ を行う. その結果, 直前の基底行列から 1 つの列が抜けて, 新しく選ばれた列が加わって基底行列が更新される.

(5) さらに, ピボットの列に対応する目的関数の係数を 0 にするように基本変形を行い, 次の判定項 $c_N^T - c_B^T B^{-1}N$ ⁷⁾ を構成する.

では, シンプレックス法の計算手順を具体的な線形計画問題で確認してみよう.

○例 2.7. 次の不等式制約付き問題を考える.

$$(\text{LP}) \begin{cases} \text{Min} & -x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(1) まず, スラック変数 x_3, x_4 を挿入して標準形 $(\text{LP})'$ に変形する.

$$(\text{LP})' \begin{cases} \text{Min} & -x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ \text{s.t.} & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

(2), (3), (4) 次に, 行列とベクトルの成分を表にする. この問題の場合は, すべての行にスラック変数を入れたので, 実行可能基底解が $\boldsymbol{x} = (0, 0, 12, 8)^T$ となり, 単位行列が挿入された形になっていて, それが基底行列となっている. そこ

7) 各反復の判定項がこの式の形になっている理由については次節で説明する.

でその各列ベクトルを四角で囲む。

$$\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 2 & \boxed{1} & \boxed{0} & 12 \\ 1 & 2 & \boxed{0} & \boxed{1} & 8 \end{array}$$

(5), (6) また、計算手順の (5) における「判定項の構成」のステップで、「基底変数に対応する目的関数の係数部分を 0 にする」ことを考えると、スラック変数を入れた場合は、すでに 0 になっていて変形の必要がない。よって、**判定項**の位置の係数にすぐに目印 ($\square$) を付けてもよい。

(7), (8) 判定項に負の成分があるなら、そのなかで一番左に位置しているところを丸 ($\circ$) で囲む。

(9) 丸 ($\circ$) で囲んだところの下の方の列ベクトルの成分からピボットの位置を探す。ピボットの候補は 3 と 1 である。右辺の数をそれぞれで割ると 4 が小さい。

$$\begin{array}{cccc|c} \boxed{-1} & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 2 & \boxed{1} & \boxed{0} & 12 \\ 1 & 2 & \boxed{0} & \boxed{1} & 8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} \boxed{-1} & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \textcircled{3} & 2 & \boxed{1} & \boxed{0} & 12 \\ 1 & 2 & \boxed{0} & \boxed{1} & 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} 12/3 = \textcircled{4} \\ 8/1 = 8 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{l} \cdot \text{ピボットの位置が 3 の} \\ \text{ところとなり、これを} \\ \text{1 にするために制約} \\ \text{第 1 式を } \frac{1}{3} \text{ 倍する。} \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \textcircled{1} & 2/3 & 1/3 & \boxed{0} & 4 \\ 1 & 2 & 0 & \boxed{1} & 8 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{l} \cdot \text{目的関数式に制約} \\ \text{第 1 式を加える。} \\ \cdot \text{制約第 2 式に制約} \\ \text{第 1 式の } (-1) \text{ 倍} \\ \text{を加える。} \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} -1+1 & -1+2/3 & 0+1/3 & 0+0 & 0+4 \\ \hline \textcircled{1} & 2/3 & 1/3 & \boxed{0} & 4 \\ 1-1 & 2-2/3 & 0-1/3 & \boxed{1} & 8-4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{l} \cdot \text{判定項のなかにまだ} \\ \text{負のところがあり、} \\ \text{計算を終了できない。} \\ \text{その場所 } (-1/3) \text{ を} \\ \text{ } \circ \text{ で囲む。} \\ \cdot \text{次のピボットは} \\ \text{ } 4/3 \text{ のところとなる。} \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} 0 & \boxed{-1/3} & \boxed{1/3} & 0 & 4 \\ \hline \boxed{1} & 2/3 & 1/3 & \boxed{0} & 4 \\ 0 & \textcircled{4/3} & -1/3 & \boxed{1} & 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4 \times \frac{3}{2} = 6 \\ 4 \times \frac{3}{4} = \textcircled{3} \end{array}$$

$$\left(\cdot \text{制約第 2 式を } \frac{3}{4} \text{ 倍する。} \right) \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} 0 & -1/3 & 1/3 & 0 & 4 \\ \hline \boxed{1} & 2/3 & 1/3 & 0 & 4 \\ 0 & \textcircled{1} & -1/4 & 3/4 & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{l} \cdot \text{目的関数式に制約第 2 式} \\ \quad \text{の } \frac{1}{3} \text{ 倍を加える.} \\ \cdot \text{制約第 1 式に制約第 2 式} \\ \quad \text{の } -\frac{2}{3} \text{ 倍を加える.} \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{cc|cc|c} 0 & 0 & \overbrace{1/4}^{\nearrow 0} & \overbrace{1/4}^{\nearrow 0} & \textcircled{5} \\ \hline \boxed{1} & \boxed{0} & 1/2 & -1/2 & 2 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & -1/4 & 3/4 & 3 \end{array}$$

判定項のすべての成分が 0 以上となったので停止して、非基底変数の値を 0 にする ($x_3 = 0, x_4 = 0$). その結果、基底変数の値が定まる ($x_1 = 2, x_2 = 3$). よって、(2.14) の実行可能基底解は $\mathbf{x} = (2, 3, 0, 0)^T$ となる. したがって、もとの問題 (LP) の答えは、「 $x_1 = 2, x_2 = 3$ のとき、最適値 -5 」となる. $\square$

シンプレックス法の計算で、停止したときの連立 1 次方程式を変数を付けて表し、非基底変数の値を 0 にすると簡単な式となり、基底変数の値がすぐに求まる. 上の問題を例にして説明すると

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & \boxed{0} & 1/2 & -1/2 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & -1/4 & 3/4 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_2} \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となるので、 $x_3 = 0, x_4 = 0$ とすれば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となり、 $x_1 = 2, x_2 = 3$ が求まる. 最初の問題 (LP) では、変数は x_1 と x_2 の 2 つだけに関する問題だったので、解として表現するには、スラック変数は書かずにもとの変数だけを使って最適解を表せばよい. また、もとのそれぞれの式に代入すれば検算できるが、最適値になっているかどうかまでは確認できない.

一方、シンプレックス法の最初の表の 1 行目は目的関数の係数を並べている. 例えば、上の問題では、

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1)x_1 + (-1)x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

としたとき、表の 1 行目は各係数を並べていて、定数項の部分はないので、右辺に移項しても初期値は 0 となっている. よって、計算が進んでいくと、この値が変化して、停止した際には左辺にもどして値を考えなければならない. そのために、符号が反転する結果となる. また、最初の判定のとき、基底変数が x_3 と x_4

で $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (0, 0, 12, 8)^T$ が実行可能基底解となり、目的関数値は 0 となっている。ここで、 x_3 と x_4 の値を少し小さくして、 x_1 を 0 から正の値 (例えば $r > 0$) へ少し増やすと、連立 1 次方程式をみたしたまま目的関数値が減少する ($-r$ となる)。これは、目的関数の係数が負になっている非基底変数であれば、その値を 0 から正に変更すると目的関数値が減少することを意味している。

◆**演習 2.3.** 例 2.6 の最適解と最適値をシンプレックス法を用いて求め、例 2.6 の結果と一致することを確認せよ。

注意 2.1. 一般に反復をとまなう計算では、巡回を防ぐために何らかの規則を設定しなければならない。本書のように、判定項のなかで負の値が複数あった場合に「一番左に位置しているところ」とすることが一つの方法である。

考え方：反復が終了する 2 つの場合

シンプレックス法の計算において、反復を終了する場面が 2 種類ある。1 つは判定項に負の値がないときで、もう一つは選んだ係数に対応する非基底行列の列ベクトルに正の成分がないときである。前者は最適解が見つかるときで、後者は制約条件を保ったままいくらでも目的関数値が小さくなる、つまり、最適解が存在せず最小値がないときである。

2.3 節の問題

[1] 次の線形計画問題の最適解と最適値をシンプレックス法で求めよ。

$$(\text{LP1}) \begin{cases} \text{Min} & 3x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} & -2x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

[2] 次の線形計画問題の最適解と最適値をシンプレックス法で求めよ。

$$(\text{LP2}) \begin{cases} \text{Max} & -5x_1 - 7x_2 - 11x_3 - 15x_4 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ & x_2 + x_3 + 3x_4 = 20 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$